

# Introdução ao Método de Galerkin Estocástico

Americo Barbosa da Cunha Junior

Departamento de Engenharia Mecânica  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
[americo.cunhajr@gmail.com](mailto:americo.cunhajr@gmail.com)

26 de julho de 2011

# Sumário

- 1 Introdução
- 2 Representação de Campos Aletórios
  - Decomposição de Karhunen-Lòeve
  - Polinômio Caos Generalizado
- 3 Método de Galerkin Estocástico
  - Procedimento Geral
  - Exemplo 1: Equação de Poisson
  - Exemplo 2: Equação do Calor
- 4 Comentários Finais
- 5 Referências

# Motivação

- Os sistemas mecânicos reais estão sujeitos à incertezas nos parâmetros devido a vários fatores.
- Esta variabilidade no conjunto de parâmetros do sistema leva a um grande número de possíveis respostas do mesmo.
- Um modelo estocástico para tais sistemas pode ser tratado diretamente através de simulação de Monte Carlo (MC), porém essa abordagem demanda um elevado esforço computacional.

# Objetivos

- Apresentar uma técnica alternativa à simulação de Monte Carlo para obtenção da resposta de um modelo estocástico;
- Ilustrar a aplicação dessa metodologia e caracterizar a mesma quanto à acurácia e performance.

## Decomposição de Karhunen-Lòève (KL)

Seja  $u : \mathcal{D} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  um campo estocástico com média  $\mu_u$  e autocovariância  $K_u(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  contínua. Então

$$u(\mathbf{x}, \omega) = \mu_u + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \phi_i(\mathbf{x}) \xi_i(\omega),$$

onde

- $\xi_i$  são variáveis aleatórias tais que

$$\mathbb{E}[\xi_i] = 0 \quad \mathbb{E}[\xi_i \xi_j] = h_i \delta_{ij},$$

- $\{\lambda_i, \phi_i\}$  são soluções da equação

$$\int_{\mathcal{D}} K_u(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \phi_i(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_2 = \lambda_i \phi_i(\mathbf{x}_1).$$

## Decomposição de Karhunen-Lòeve (KL)

- Representação ótima no sentido que minimiza erro quadrático médio após o truncamento da série;
- Aplicável somente quando a função de autocovariância do campo aleatório for conhecida.

## Polinômio Caos Generalizado (gPC)

Seja  $u : \mathcal{D} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ . Então

$$u(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(\mathbf{x}) \psi_i[\boldsymbol{\xi}(\omega)],$$

onde

- $u_i$  são funções determinísticas;
- $\boldsymbol{\xi}$  é um vetor de variáveis aleatórias;
- $\psi_i$  são polinômios ortogonais tais que

$$\mathbb{E}[\psi_1] = 1, \quad \mathbb{E}[\psi_i] = 0, \quad i > 1, \quad \mathbb{E}[\psi_i \psi_j] = h_i \delta_{ij}.$$

## Polinômio Caos Generalizado (gPC)

- Aplicável se a distribuição de probabilidade do campo aleatório for conhecida ou não;
- Os polinômios  $\psi_i$  são escolhidos de acordo com a natureza das variáveis  $\xi$ :

$\xi$	$\psi_i$
Gaussiana	Hermite
Gama	Laguerre
Beta	Jacobi
Uniforme	Legendre



## SGM: Procedimento Geral

O método de Galerkin estocástico (SGM) procura por um campo estocástico  $u(\mathbf{x}, t, \omega)$ , definido no espaço probabilístico  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , que seja uma aproximação para a solução da seguinte equação diferencial estocástica

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, t, \omega; u) = f(\mathbf{x}, t, \omega),$$

onde  $\mathcal{L}$  é um operador diferencial que envolve diferenciação no tempo e/ou no espaço e  $f$  é um termo fonte.

## SGM: Procedimento Geral

Aproxima-se o campo  $u$  por um truncamento da expansão em gPC

$$u(\mathbf{x}, t, \omega) \approx \sum_{i=1}^P u_i(\mathbf{x}, t) \psi_i[\boldsymbol{\xi}(\omega)],$$

e em seguida substitui-se na equação que se deseja resolver

$$\mathcal{L} \left( \mathbf{x}, t, \omega; \sum_{i=1}^P u_i \psi_i \right) = f(\mathbf{x}, t, \omega).$$

## SGM: Procedimento Geral

Projeta-se a última equação no espaço vetorial gerado pelas  $\psi_j$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \mathcal{L} \left( \mathbf{x}, t, \omega; \sum_{i=1}^P u_i \psi_i \right) \psi_j \right] = \mathbb{E} [f(\mathbf{x}, t, \omega) \psi_j], \quad j = 1, \dots, P,$$

de forma que o erro gerado pela aproximação seja minimizado.

## Problema de Valor de Contorno Estocástico

Dado um espaço probabilístico  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , considere o problema de valor de contorno estocástico em que se busca um campo  $u(x, y, \omega)$  tal que

$$\begin{aligned}\alpha \nabla^2 u &= 1 & (x, y, \omega) \in \mathcal{D} \times \Omega \\ u &= 0 & (x, y, \omega) \in \partial \mathcal{D} \times \Omega,\end{aligned}$$

onde  $\alpha$  é uma variável aleatória uniformemente distribuída em  $[1, 3]$  e  $\mathcal{D} = [-1, 1]^2$ .

## Parametrização e Expansão em gPC

Neste problema a variável aleatória  $\alpha$  é parametrizada por

$$\alpha = \xi + 2,$$

onde  $\xi \sim U[-1, 1]$ . Já o campo  $u$  é aproximado por

$$u(x, \omega) \approx \sum_{i=1}^P u_i(x, y) \psi_i(\xi),$$

onde  $u_i(x, y)$  são funções determinísticas,  $\psi_i$  são polinômios de Legendre e  $P = (K+1)!/K!$ , sendo  $K$  o grau máximo dos polinômios de Legendre.

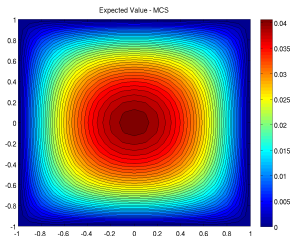
## Projeção de Galerkin

Seguindo o procedimento geral do SGM obtêm-se

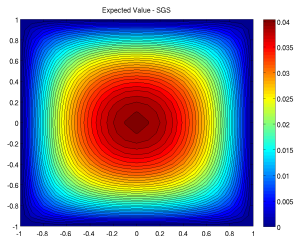
$$\sum_{i=1}^P ((u_i)_{xx} + (u_i)_{yy}) \mathbb{E} [\psi_i(\xi + 2)\psi_j] = \mathbb{E} [\psi_j] \quad (x, y) \in \mathcal{D}$$
$$u_j = 0 \quad (x, y) \in \partial\mathcal{D},$$

para  $j = 1, \dots, P$ . Esse sistema foi resolvido utilizando o código `Poisson_2D`, que é baseado no método de diferenças finitas.

## Média das Soluções



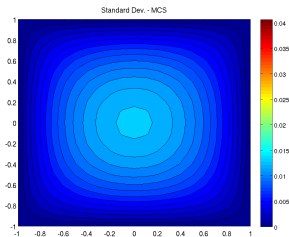
(a) MC



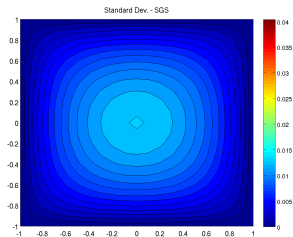
(b) gPC

Figura: Média das soluções da eq. de Poisson obtidas por MC e gPC.

## Desvio Padrão das Soluções



(a) MC



(b) gPC

**Figura:** Desvio padrão das soluções da equação de Poisson obtidas por MC e gPC.



## Erro da Aproximação

**Tabela:** Norma do máximo (em função de  $K$ ) das estatísticas da diferença entre as soluções da eq. de Poisson obtidas por MC e gPC.

$K$	média	desvio padrão
3	0.00026079	0.00040902
5	0.00023984	0.00023604
7	0.00023973	0.00023440
10	0.00023972	0.00023439
20	0.00023972	0.00023439

## Tempo de Processamento

**Tabela:** Ganho de tempo (em função de  $K$ ) da simulação da eq. de Poisson utilizando gPC em relação a simulação que utiliza MC.

$K$	tempo gasto (s)	speed-up
MC	10.3	
3	2.5	4.1
5	2.7	3.7
7	2.9	3.5
10	5.1	2.0
20	7.8	1.3

## Problema de Valor Inicial-Contorno Estocástico

Dado um espaço probabilístico  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , considere o problema que consiste em encontrar um campo  $u(x, t, \omega)$  tal que

$$u_t = (\alpha u_x)_x + 1 \quad x \in [-1, 1], \quad t \in [0, T], \quad \omega \in \Omega,$$

com condições de contorno  $u(-1, t, \omega) = u(1, t, \omega) = 0$  e condição inicial  $u(x, 0, \omega) = 0$ . Neste problema  $\alpha : [-1, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é um campo aleatório de média  $\mu_\alpha = 10$  e autocovariância

$$K_\alpha(x_1, x_2) = \exp(-|x_1 - x_2|), \quad x_1, x_2 \in [-1, 1].$$

## Parametrização

O campo  $\alpha$  é aproximado pelo truncamento da decomposição KL

$$\alpha(\mathbf{x}, \omega) = \mu_\alpha + \sum_{i=1}^N \sqrt{\lambda_i} \phi_i(\mathbf{x}) \xi_i(\omega),$$

onde  $\xi_i \sim U[-1, 1]$  e  $\{\lambda_i, \phi_i\}$  são soluções da equação

$$\int_{-1}^1 \exp(-|x_1 - x_2|) \phi_i(x_2) dx_2 = \lambda_i \phi_i(x_1).$$

## Expansão em gPC

O campo  $u$  é aproximado por uma expansão em gPC da forma

$$u(x, t, \omega) \approx \sum_{i=1}^P u_i(x, t) \psi_i(\xi),$$

onde  $u_i(x, t)$  são funções determinísticas,  $\psi_i$  são polinômios de Legendre e  $P = (K + N)! / (K! N!)$ , sendo  $K$  o grau máximo dos polinômios de Legendre.

## Projeção de Galerkin

Seguindo o procedimento geral do SGM obtêm-se

$$\mathbb{E} \left[ \psi_j^2 \right] (u_k)_t = \sum_{i=1}^P (u_i)_{xx} \left( \mu_\alpha \mathbb{E} \left[ \psi_k^2 \right] + \sum_{j=1}^N \mathbb{E} \left[ \psi_k \xi_j \psi_i \right] \sqrt{\lambda_j} \phi_j \right) +$$

$$\sum_{i=1}^P (u_i)_x \left( \sum_{j=1}^N \mathbb{E} \left[ \psi_k \xi_j \psi_i \right] \sqrt{\lambda_j} (\phi_j)_x \right) + \mathbb{E} \left[ \psi_k \right],$$

para  $k = 1, \dots, P$ . Esse sistema foi resolvido utilizando o código Heat\_1D, que utiliza um esquema numérico tipo Crank-Nicolson.

# Estatísticas das Soluções

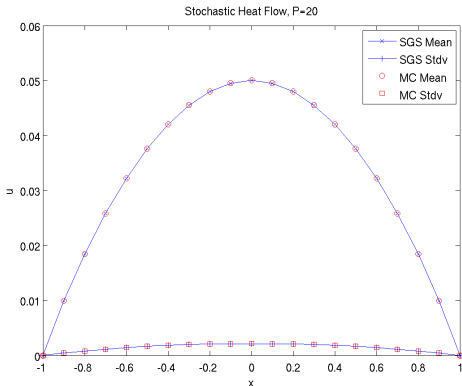


Figura: Estatísticas das soluções da eq. do calor obtidas por MC e gPC.

## Erro da Aproximação

**Tabela:** Norma do máximo (em função de  $K$ ) das estatísticas da diferença entre as soluções da eq. do calor obtidas por MC e gPC.

$K$	média	desvio padrão
3	$3.6956 \times 10^{-5}$	$4.4778 \times 10^{-5}$
4	$3.6918 \times 10^{-5}$	$3.7744 \times 10^{-6}$
5	$3.6956 \times 10^{-5}$	$4.4780 \times 10^{-5}$







## Tempo de Processamento

**Tabela:** Ganho de tempo (em função de  $K$ ) da simulação da eq. do calor utilizando gPC em relação a simulação que utiliza MC.

$K$	tempo gasto (s)	speed-up
MC	1.0	
3	15.2	$6.6 \times 10^{-2}$
4	47.2	$2.1 \times 10^{-2}$
5	122.5	$8.1 \times 10^{-3}$

## Comentários Finais

- O método de Galerkin estocástico (SGM) é uma boa alternativa à simulação de Monte Carlo, pois tem boa acurácia e demanda baixo esforço computacional;
- Essa técnica foi ilustrada na solução de dois exemplos simples e os resultados permitiram caracterizar a boa performance e acurácia do método SGM.

-  Constantine, P. **A Primer on Stochastic Galerkin Methods.** Lecture Notes, 2007.
-  Ghanem, R.; Spanos, P., **Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach.** New York: Dover Publications, 2003.
-  Shonkwiler, R. W.; and Mendivil, F., **Explorations in Monte Carlo Methods.** New York: Springer, 2009.
-  Xiu. D.; Karniadakis, G., The Wiener-Askey Polynomial Chaos for Stochastic Differential Equations. **SIAM Journal on Scientific Computing**, Vol. 24, pp. 619-644, 2002.