Autovalores e Autovetores

Americo Cunha
Débora Mondaini
Ricardo Sá Earp

Departamento de Matemática
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

1 Autovalores e Autovetores

Seja A uma matriz real $n \times n$. Dizemos que um número λ é *autovalor* de A, se existe $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tal que

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}.$$

Nesse caso $\mathbf{v}$ é dito um *autovetor* de A, associado ao autovalor λ.

Exemplo 1.1 *Considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

O vetor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ *é um autovetor de* A *com autovalor* $\lambda = 1$, *pois*

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Já o vetor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *não é autovetor de* A, *pois*

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Agora vamos apresentar um método sistemático para calcular os autovalores de uma matriz. Pela definição de autovalor sabemos que

$$\begin{aligned} A\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow \\ A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ (A - \lambda I)\,\mathbf{v} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, a última equação é satisfeita se e somente se $det\,(A - \lambda I) = 0$. Esse determinante é um polinômio de grau n na variável λ. Assim vemos que os autovalores de A são as raízes da função $p(\lambda) = det\,(A - \lambda I)$, denominada *polinômio característico* de A. O polinômio característico possui sempre n raízes complexas (possivelmente com multiplicidade) da forma $a + ib$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$. Já os autovetores de A, associados ao autovalores λ, são as soluções não nulas do sistema linear homogêneo $(A - \lambda I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Exemplo 1.2 *Considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico é dado por

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det\,(A - \lambda I) \\ &= det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 - 1. \end{aligned}$$

Logo, seus autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$.
Para $\lambda = 1$ temos que $(A - \lambda I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$ equivale a

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde concluimos que $v_x = 2v_y$.

Um possível autovetor associado a $\lambda = 1$ é $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Para $\lambda = -1$ temos que $(A - \lambda I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$ equivale a

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde concluimos que $v_x = v_y/2$.

Um possível autovetor associado a $\lambda = -1$ é $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Exemplo 1.3 *Considere a matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico é dado por

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det\,(B - \lambda I) \\ &= det\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^3 - 12\lambda^2 + 36\lambda - 32. \end{aligned}$$

Logo, seus autovalores são $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ *e* $\lambda_3 = 8$.
Para $\lambda = 2$ *temos que* $(A - \lambda I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$ *equivale a*

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde concluimos que $v_x + v_y + v_z = 0$.

Nesse caso temos um plano de autovetores. Dois possíveis autovetores ortogonais, associado a $\lambda = 2$, *são dados por* $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *e* $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Para $\lambda = 8$ *temos que* $(A - \lambda I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$ *equivale a*

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde concluimos que $2v_x - v_y - v_z = 0$ *e* $v_x - 2v_y + v_z = 0$.

Um possível autovetor associado a $\lambda = 4$ *é* $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Observe que os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ *e* $\mathbf{v}_3$ *formam uma base ortogonal de autovetores.*

Exercício 1.1 *Mostre que o polinômio caracterítico de uma matriz* 2×2 *é da forma*

$$p(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A),$$

onde $tr(A)$ *e* $det(A)$ *denotam o traço e o determinante de* A *respectivamente. Lembre-se que o traço de uma matriz é a soma dos elementos da diagonal principal.*

Exercício 1.2 *Encontre matrizes reais* 2×2 *e* 3×3*, que não possuam autovalores reais. Calcule os autovetores associados a esses autovalores complexos.*

2 Teorema Espectral

Seja A uma matriz real $n \times n$. Se A é simétrica, i.e., $A = A^T$, então existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de A. Uma consequência disso é que a matriz A admite uma decomposição da forma $A = V\Lambda V^T$, onde Λ é uma matriz real diagonal e V é uma matriz real ortogonal, i.e., $VV^T = V^TV = I$.

Vejamos agora uma maneira de construir as matrizes dessa decomposição. Vamos fixar as ideias no caso 2×2.

Primeiro olhemos para o produto

$$\begin{aligned} AV &= A\begin{bmatrix} | & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \\ | & | \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} | & | \\ A\mathbf{v}_1 & A\mathbf{v}_2 \\ | & | \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e em seguida para o produto

$$\begin{aligned} V\Lambda &= \begin{bmatrix} | & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} | & | \\ \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 \\ | & | \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

O teorema da decomposição espectral nos diz que se A é real e simétrica, então $A = V\Lambda V^T \Leftrightarrow AV = V\Lambda$, uma vez que V é ortogonal.

Comparando as equações acima para AV e $V\Lambda$ podemos notar que $A\mathbf{v}_i = \lambda_i A\mathbf{v}_i$, ou seja a matriz Λ tem os autovalores de A (que sempre são números reais, vide exercício abaixo) na diagonal principal e a matriz V tem autovetores unitários de A em suas colunas, dispostos de maneira compatível com a ordenação dos autovalores em Λ.

Exercício 2.1 *Mostre que os autovalores de uma matriz* $n\times n$ *real simétrica sempre são números reais.*

3 Identificação de Cônicas via Autovalores

Considere a cônica representada pela equação

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 30x - 40y = 5.$$

Na equação acima os termos lineares x e y estão associados a translação da cônica com relação à origem do sistema de coordenadas. Já o termo cruzado xy indica que essa cônica está rotacionada com relação aos eixos coordenados.

Observe que a equação acima pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 - 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad = \quad 5,$$

donde percebemos que toda cônica está associada a uma matriz real simétrica Q.

Neste caso temos

$$Q = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix},$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = 10$ e $\lambda_2 = 5$, com autovetores unitários associados, respectivamente, iguais a $\mathbf{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Pelo teorema da decomposição espectral sabemos que

$$\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix},$$

e que

$$\begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, definindo

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

podemos escrever a equação da cônica como

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 - 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad = \quad 5,$$

que equivale a

$$10x'^2 + 5y'^2 + 20\sqrt{5}x' - 10\sqrt{5}y' = 5.$$

Completando quadrado em x' e y' chegamos a equação

$$10(x' + \sqrt{5})^2 + 5(y' - \sqrt{5})^2 = 80,$$

que pode ser simplificada

$$\frac{(x' + \sqrt{5})^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{(y' - \sqrt{5})^2}{(4)^2} = 1.$$

No sistema de coordenadas $x'y'$ reconhecemos que a equação da cônica é uma elipse, com semi-eixos $a = 2\sqrt{2}$ e $b = 4$ e centrada em $x' = -\sqrt{5}$ e $y' = \sqrt{5}$, que corresponde ao ponto com coordenadas $x = -1$ e $y = 3$ no sistema cartesiano usual. Veja a Figura 1.

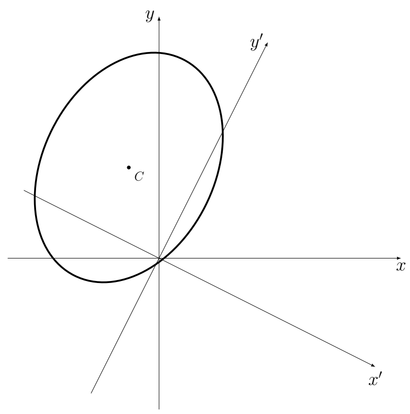

Figura 1: Elipse fora da origem rotacionada.

Exercício 3.1 *Identifique e desenhe as seguintes cônicas:*

- $2x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 8y = -14$
- $21x^2 + 6xy + 13y^2 - 114x + 34y + 73 = 0$
- $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0$

No caso de uma elipse, indique o centro e os semi-eixos. Caso seja uma hipérbole, o centro e as assíntotas. Numa parábola o vértice.

4 Identificação de Quádricas via Autovalores

Considere a cônica representada pela equação

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - x = 3.$$

Na equação acima o termo linear x está associado a translação da quádrica com relação à origem do sistema de coordenadas. Já os termos cruzados xy, xz e yz indicam que esta quádrica está rotacionada com relação aos eixos coordenados.

Observe que a equação acima pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3,$$

donde percebemos que toda cônica está associada a uma matriz real simétrica Q.

Neste caso temos

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

cujos autovalores (calculados acima) são $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 8$, com autovetores unitários associados, respectivamente, iguais a $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Pelo teorema da decomposição espectral sabemos que

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

e que

$$\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, definindo

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

podemos escrever a equção da quádrica como

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = 3,$$

que equivale a

$$2x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x' = 3.$$

Completando quadrado em x' chegamos a equação

$$2\left(x' + \sqrt{2}/8\right)^2 + 2y'^2 + 8z'^2 = \frac{49}{16},$$

que pode ser simplificada

$$\frac{\left(x' + \sqrt{2}/8\right)^2}{(7\sqrt{2}/8)^2} + \frac{y'^2}{(7\sqrt{2}/8)^2} + \frac{z'^2}{(7\sqrt{2}/16)^2} = 1,$$

No sistema de coordenadas $x'y'z'$ reconhecemos que a equação da quádrica é um elipsóide, com semi-eixos $a = b = 7\sqrt{2}/8$ e $c = 7\sqrt{2}/16$ e centrada em $x' = -\sqrt{2}/8$, $y' = 0$ e $z' = 0$.

Exercício 4.1 *Identifique e esboce (explicando o desenho) as seguintes quádricas:*

- $2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z = -9$
- $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z$
- $2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0$
- $2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz + 2yz + 10x - 26y - 2z = 0$