Noções Topológicas do Plano

Americo Cunha
André Zaccur
Débora Mondaini
Ricardo Sá Earp

Departamento de Matemática
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

1 Distância entre dois pontos do plano

Um *sistema de coordenadas cartesiano* em $\mathbb{R}^2$ (no plano) é definido por um par de eixos perpendiculares (eixo x e eixo y) que possuem uma mesma origem O. Num sistema de coordenadas desse tipo, um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ é representado por um par ordenado da forma (x_p, y_p), como ilustrado na Figura 1.

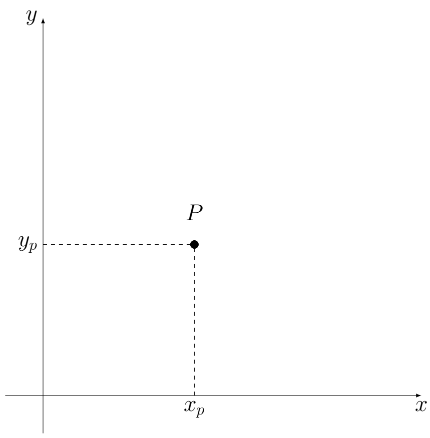


Figura 1: Representação cartesiana de um ponto do plano.

A distância entre $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$, dois pontos do plano, é dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}. \tag{1}$$

Para verificar a origem da fórmula acima, assumindo que a distância entre dois pontos na reta é dada pelo módulo da diferenças entre eles, vamos considerar o triângulo retângulo ilustrado na Figura 2.

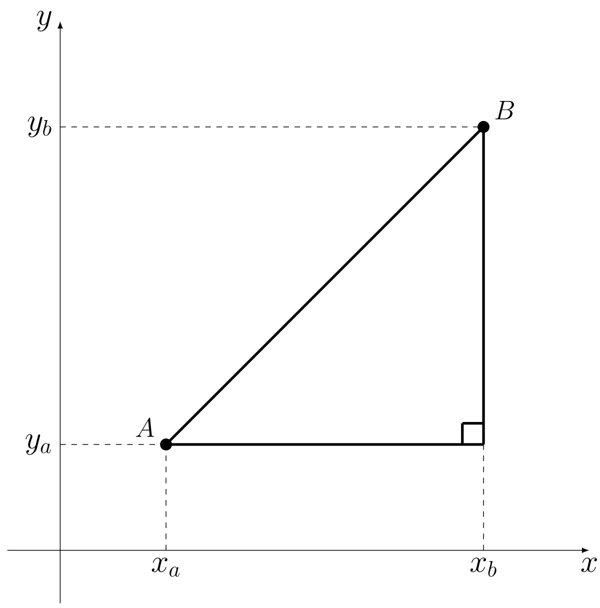


Figura 2: Distância entre dois pontos do plano.

A distância entre os pontos A e B, denotada por $d(A, B)$, corresponde à hipotenusa desse triângulo retângulo, enquanto que os catetos tem comprimentos $|x_b - x_a|$ e $|y_b - y_a|$. Logo, pelo teorema de Pitagoras

$$\big[d(A, B)\big]^2 = (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2, \tag{2}$$

que equivale a

$$d(A, B) = \pm\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}. \tag{3}$$

Como a distância entre dois pontos é sempre não negativa, podemos descartar a fórmula com sinal negativo antes da raiz. Com isso mostramos que a distância entre os pontos A e B é dada pela Eq.(1).

Exercício 1.1 *Mostre que a função distância satisfaz as seguintes propriedades:*

- $d(A, B) \geq 0$
- $d(A, B) = 0$ *se e somente se* $A = B$
- $d(A, B) = d(B, A)$
- $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ *onde* $C = (x_c, y_c)$

2 Sequência de pontos no plano

Uma *sequência em* $\mathbb{R}^2$ é uma lista ordenada de pontos da forma $P_n = (x_n, y_n)$ onde $n = 1, 2, 3, \cdots$. Logo, x_n e y_n são sequências de números reais (que você estudou em Cálculo 1).

Exemplos

- $P_n = (n, n^2)$
- $P_n = (2, (-1)^n)$
- $P_n = (n, \pi)$
- $P_n = \left(\dfrac{3n^3 + n^2 + 7}{2n^3 + n + 1}, \dfrac{4n^3 + 8}{7n^4 + 1} \right)$
- $P_n = \left(\sin\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{\pi}{2} \right), \dfrac{1}{n} \cos\left(n^3 + n + 1 \right) \right)$

Uma sequência de pontos $P_n = (x_n, y_n)$ *converge* a um ponto $P_\infty = (x_\infty, y_\infty)$ do plano, se a distância $d(P_n, P_\infty)$ converge a zero, i.e., $\lim\limits_{n\to\infty} d(P_n, P_\infty) = 0$. Nesse caso dizemos que P_∞ é o limite de P_n quando $n \to \infty$ e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_\infty. \tag{4}$$

A quantidade $d(P_n, P_\infty)$ define uma sequência de números reais. A convergência dessa sequência pode ser analisada pelos resultados estudados em Cálculo 1.

Considere a sequência $P_n = (e^{-n/4}\cos n, e^{-n/4}\sin n)$. Vamos mostrar que essa sequência converge ao ponto $P_\infty = (0, 0)$.

De fato,

$$\begin{aligned} d(P_n, P_\infty) &= \sqrt{(e^{-n/4}\cos n - 0)^2 + (e^{-n/4}\sin n - 0)^2} \\ &= \sqrt{e^{-n/2}\left(\cos^2 n + \sin^2 n\right)} \\ &= e^{-n/4}, \end{aligned}$$

donde

$$\lim_{n\to\infty} d(P_n, P_\infty) = \lim_{n\to\infty} e^{-n/4} = 0.$$

Se uma sequência $P_n = (x_n, y_n)$ não tem limite, dizemos que ela diverge. Um caso especial de divergência ocorre quando a distância de P_n à origem $O = (0, 0)$ for para o infinito, i.e., $\lim\limits_{n\to\infty} d(P_n, O) = \infty$. Nesse caso dizemos que P_n vai para o infinito.

Exercício 2.1 *Calcule o limite (caso exista) de cada uma das sequências abaixo:*

- $P_n = (n, n^2)$
- $P_n = (2, (-1)^n)$
- $P_n = (n, \pi)$
- $P_n = \left(\dfrac{3n^3 + n^2 + 7}{2n^3 + n + 1}, \dfrac{4n^3 + 8}{7n^4 + 1} \right)$
- $P_n = \left(\sin \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{\pi}{2} \right), \dfrac{1}{n} \cos \left(n^3 + n + 1 \right) \right)$
- $P_n = \big(\pi + 1/n, 1 - 1/n\big)$
- $P_n = \big(n, (-1)^n\big)$
- $P_n = \big(\cos (e^{-n}), \sin (e^{-n})\big)$
- $P_n = \big(\cos (2\pi n), \sin (2\pi n + \pi/2)\big)$

Exercício 2.2 *Considere $P_n = \big(x_n, f(x_n)\big)$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e x_n sequência de números reais que converge a 1.*
(a) Calcule (caso exista) o limite de P_n quando $n \to \infty$.
(b) Explicite três exemplos de P_n como acima.

3 Regiões abertas e fechadas

O *disco aberto* de centro $C = (x_c, y_c)$ e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ em $\mathbb{R}^2$ tais que

$$d(C, P) < r, \tag{5}$$

ou seja

$$\sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} < r. \tag{6}$$

A última inequação equivale a

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 < r^2, \tag{7}$$

cuja interpretação geométrica é apresentada na Figura 3. O referido conjunto está na cor cinza (a linha tracejada não faz parte do conjunto).

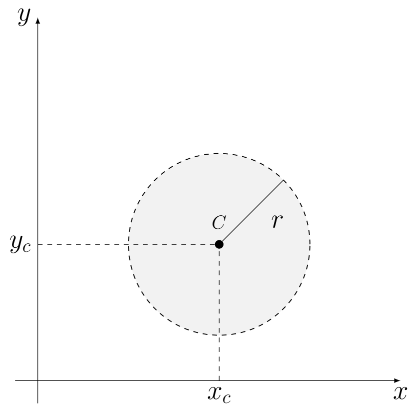


Figura 3: Disco aberto de centro C e raio $r > 0$.

O *disco fechado* de centro $C = (x_c, y_c)$ e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ em $\mathbb{R}^2$ tais que

$$d(C, P) \leq r, \tag{8}$$

ou seja

$$\sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} \leq r, \tag{9}$$

ou, ainda,

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 \leq r^2. \tag{10}$$

Agora o círculo de centro C e raio r faz parte do conjunto, como ilustrado na Figura 4.

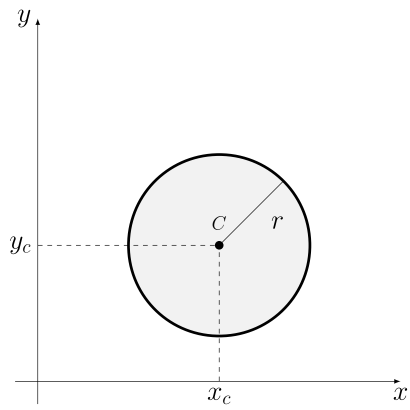


Figura 4: Disco fechado de centro C e raio $r > 0$.

Dado uma região $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, dizemos que um ponto $P \in \mathcal{D}$ é um *ponto de fronteira de* $\mathcal{D}$ se todo disco aberto de centro P e raio $r > 0$ contiver pontos que estão em $\mathcal{D}$ e pontos que não estão em $\mathcal{D}$.

Se P *não* for ponto de fronteira de $\mathcal{D}$ existem duas possibilidades:

1. existe um disco aberto de centro P e raio $r > 0$ que contém somente pontos de $\mathcal{D}$;

2. existe um disco aberto de centro P e raio $r > 0$ que contém somente pontos que não pertencem a $\mathcal{D}$.

No primeiro caso P é dito um *ponto interior de* $\mathcal{D}$, enquanto que no segundo caso P é dito um *ponto exterior de* $\mathcal{D}$.

Como exemplo, considere a região

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leq x \leq b \;\text{ e }\; c \leq y \leq d\right\},$$

e os pontos A, B, C e D, todos ilustrados na Figura 5.

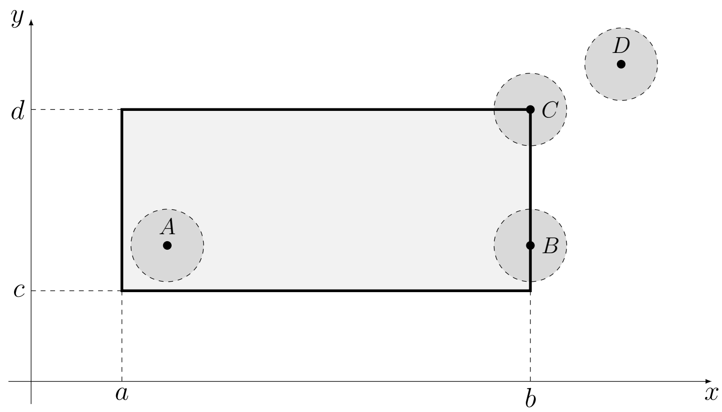


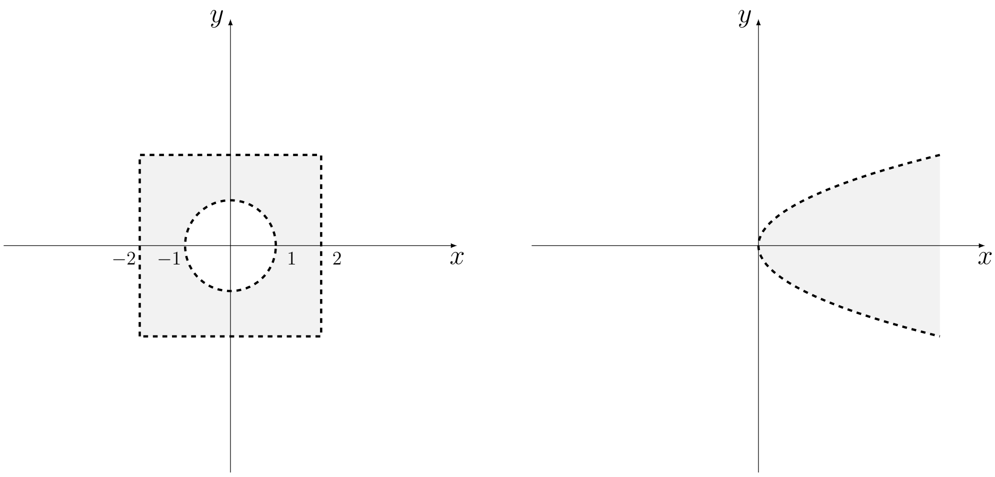
Figura 5: Um exemplo de classificação de pontos do plano.

Claramente, a região $\mathcal{D}$ é um retângulo. Os pontos B e C, que estão respectivamente numa aresta e num vértice de $\mathcal{D}$, são pontos de fronteira, pois qualquer disco aberto centrado num desses pontos possui elementos de $\mathcal{D}$ e elementos que não estão em $\mathcal{D}$. Note que A é ponto interior, pois existe um disco aberto centrado em A que possui somente elementos de $\mathcal{D}$. Finalmente, o ponto D é exterior, pois existe um disco aberto centrado nele que não contém elementos de $\mathcal{D}$.

A partir das caracterizações acima definimos as noções de região aberta e região fechada no plano.

Uma região $\mathcal{D}$ é *aberta* se contém somente pontos interiores, i.e., não contém nenhum ponto de fronteira. Vejamos dois exemplos (ilustrados na Figura 6):

- $\mathcal{D}_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| < 2, \quad |y| < 2 \;\text{ e }\; x^2 + y^2 > 1 \right\}$
- $\mathcal{D}_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > y^2 \right\}$

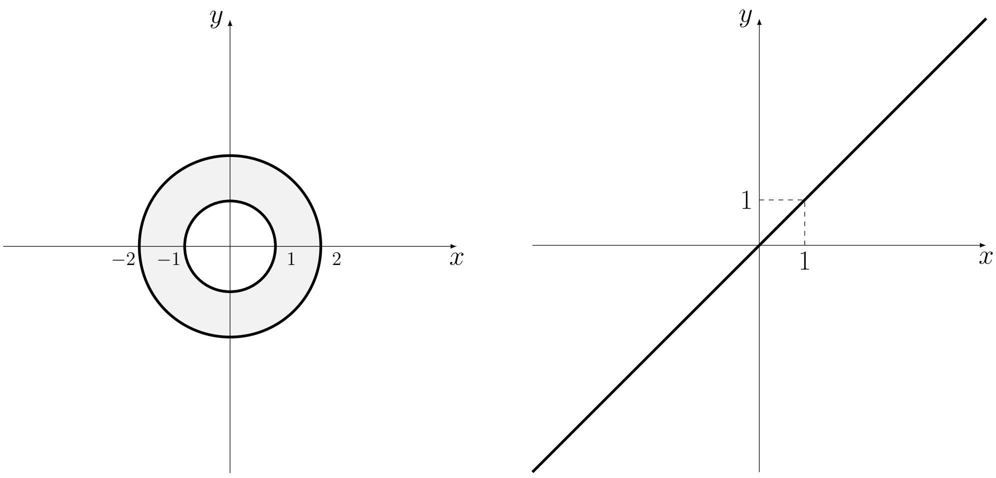


(a) $\mathcal{D}_1$ (b) $\mathcal{D}_2$

Figura 6: Exemplos de regiões abertas.

Se uma região $\mathcal{D}$ contiver todos os seus pontos de fronteira ela é chamada de *fechada*. Vejamos dois exemplos (ilustrados na Figura 7):

- $\mathcal{D}_3 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$
- $\mathcal{D}_4 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = x \right\}$



(a) $\mathcal{D}_3$ (b) $\mathcal{D}_4$

Figura 7: Exemplos de regiões fechadas.

Note que a região $\mathcal{D}_3$ possui pontos interiores e de fronteira, enquanto que $\mathcal{D}_4$ possui somente pontos de fronteira.

O interior e a fronteira das regiões acima podem ser caracterizados pelas equações e/ou inequações que os definem. Por exemplo, o interior de $\mathcal{D}_1$ é definido pelas inequações $|x| < 2$, $|y| < 2$ e $x^2 + y^2 > 1$.

Já a fronteira de $\mathcal{D}_1$, que não faz parte da região, é caracterizada pela união das curvas

- $L_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = 2 \;\text{ e }\; -2 \leq y \leq 2\right\}$,
- $L_2 = \left\{(-2, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -2 \leq y \leq 2\right\}$,
- $L_3 = \left\{(x, 2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -2 \leq x \leq 2\right\}$,
- $L_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = -2 \;\text{ e }\; -2 \leq x \leq 2\right\}$,
- $L_5 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = \sqrt{1 - x^2} \;\text{ e }\; -1 \leq x \leq 1\right\}$,
- $L_6 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = -\sqrt{1 - x^2} \;\text{ e }\; -1 \leq x \leq 1\right\}$,

onde cada uma dessas curvas é definida em termos de gráficos de funções (na variável x ou na variável y), i.e., a fronteira de $\mathcal{D}_1$ é $L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5 \cup L_6$.

No caso do conjunto $\mathcal{D}_3$, a fronteira é definida por $C_1 \cup C_2$ onde

- $C_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1\right\}$,

- $C_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2=4 \right\}$.

Já o interior de $\mathcal{D}_3$ é definido pelas inequações $1 < x^2+y^2$ e $x^2+y^2 < 4$. Em geral, um conjunto definido por uma inequação da forma $g(x,y) \leq 0$ tem interior caracterizado por $g(x,y) < 0$ e fronteira por $g(x,y) = 0$.
Atenção: existem regiões que não são abertas nem fechadas (pense em alguns exemplos).

Se uma região $\mathcal{D}$ está contida num disco então ele é dita *limitada*. Nos exemplos acima são limitadas as regiões $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_3$. Já as regiões $\mathcal{D}_2$ e $\mathcal{D}_4$ são *ilimitadas*, pois nenhum disco as contém.

Chama-se de *compacta* uma região que é fechada e limitada. A única região compacta entre os exemplos acima é D_3.

Vejamos agora um último exemplo. Considere a região do plano definida por

$$\mathcal{D}_5 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0 \;\text{ e }\; x \leq y \leq e^{\cos x} \right\},$$

ilustrada na Figura 8.

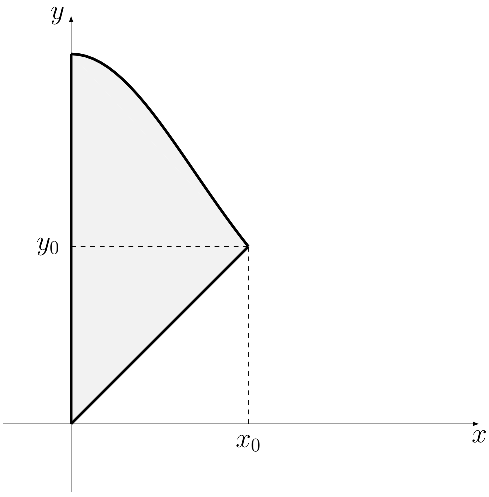


Figura 8: Região $\mathcal{D}_5$.

Essa região pode ser escrita como um conjunto onde x varia num intervalo numérico e y varia entre duas funções de x, i.e.,

$$\mathcal{D}_5 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x \leq x_0 \;\text{ e }\; x \leq y \leq e^{\cos x} \right\},$$

onde x_0 é a solução de $x = e^{\cos x}$. Também é possível descrever $\mathcal{D}_5$ como a união de dois conjuntos onde y varia num intervalo numérico e x varia entre duas funções de y, i.e., $\mathcal{D}_5 = R_1 \cup R_2$ onde

$$R_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq y \leq y_0 \;\text{ e }\; 0 \leq x \leq y \right\},$$

e

$$R_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y_0 \leq y \leq e \;\text{ e }\; 0 \leq x \leq \cos^{-1}(\ln y) \right\}.$$

sendo $y_0 = x_0$ e $e = \exp(1) = 2,718281828459045\cdots$.

Exercício 3.1 *Considere as regiões exibidas na Figura 9.*
(a) Explicite os conjuntos as definem.
(b) Classifique-as quanto às noções de: aberto, fechado, limitado.
Lembre-se: fechado e limitado é dito compacto.

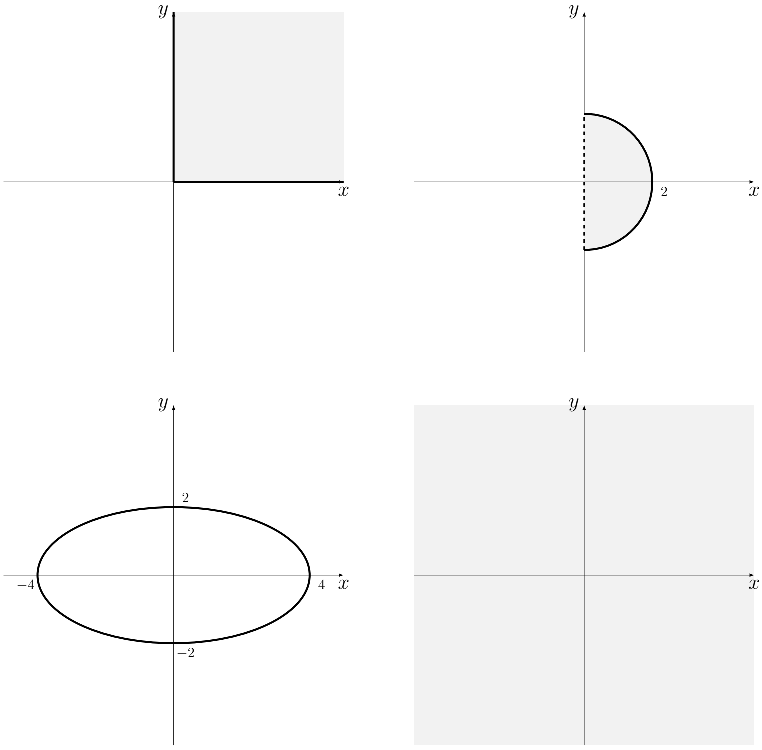


Figura 9: Regiões do exercício 4.1.

Exercício 3.2 *Descreva as regiões abaixo na forma*

$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leq x \leq b \;\; e \;\; f(x) \leq y \leq g(x) \right\},$$

explicitando a, b, f e g. Faça um esboço dessas regiões e encontre a projeção ortogonal no eixo x.

- $\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| \leq y \leq 1 - x^2 \right\}$
- $\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \right\}$

Exercício 3.3 *Escreva a fronteira de cada uma das regiões acima como a união de duas curvas C_1 e C_2, $C_1 \cup C_2$, onde cada curva dessas curvas é dada por*

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = f(x) \quad e \quad a \leq x \leq b\right\}.$$

Em cada caso explicite a, b e f.

4 Topologia no espaço

As noções definidas acima (aberto, fechado e limitado) podem ser generalizadas para regiões no espaço considerando que a distância entre os pontos $A = (x_a, y_a, z_a)$ e $B = (x_b, y_b, z_b)$ é dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}. \tag{11}$$

Consequentemente, a noção de disco é naturalmente estendida para a noção de bola. Assim, definimos a *bola fechada* de centro $C = (x_c, y_c, z_c)$ e raio $r > 0$ como o conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$ tais que

$$d(C, P) \leq r, \tag{12}$$

ou seja

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 \leq r^2. \tag{13}$$

Uma ilustração dessa bola pode ser vista na Figura 10.

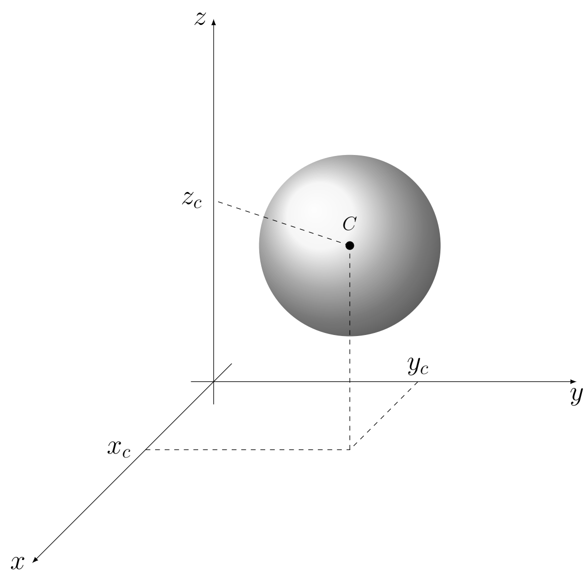


Figura 10: Bola fechada de centro C e raio $r > 0$.