O Problema da Braquistócrona e Algumas Noções de Cálculo Variacional

Americo Barbosa da Cunha Junior*

Resumo

Este trabalho descreve o clássico problema que busca encontrar a curva na qual uma partícula, sujeita somente à ação da gravidade, descreve a trajetória mais rápida entre dois pontos. Ao longo do texto apresentamos a modelagem matemática desse problema e desenvolvemos algumas noções elementares de cálculo variacional de forma a obter a curva minimizante desejada.

1 O Problema da Braquistócrona

1.1 Um Pouco de História

Em 1696 o matemático suíço Johann Bernoulli (1667-1748) apresentou aos leitores da revista científica *Acta Eruditorum* um problema que ele já havia resolvido. Na publicação Johann Bernoulli desafiava os filósofos naturais da época a apresentarem soluções para o mesmo problema, cujo enunciado original é o seguinte:

> "*Datis in plano verticali duobus punctis A et B assignare mobili M, viam AMB per quam gravitate sua descends et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B.*"

Em português contemporâneo tal problema pode ser formulado da seguinte forma:

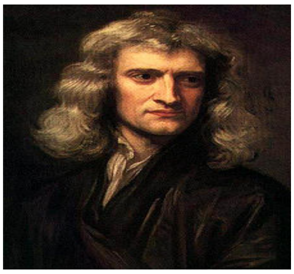
> *Sejam A e B dois pontos de um plano vertical. Encontre a curva na qual uma partícula M, sujeita somente à ação da gravidade, descreve a trajetória mais rápida entre os pontos A e B.*

O problema proposto por Bernoulli busca pela curva que minimiza o tempo de trajeto entres dois pontos. Assim sendo, a curva que resolve esse problema recebeu o nome de *braquistócrona*, do grego *brachistos* (mínimo) e *chronos* (tempo), veja [2].

*Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
americo.cunhajr@gmail.com

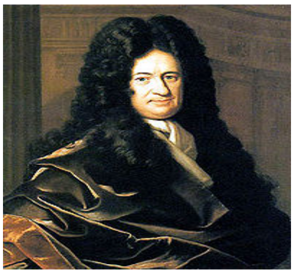
Além do próprio Johann Bernoulli, outros cinco matemáticos (Figura 1) apresentaram soluções originais para o problema: Sir Isaac Newton (1643 - 1727); Jakob Bernoulli (1654 - 1705); Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716); Ehrenfried Walther von Tschirnhaus (1651 - 1708) e Guillaume de l'Hôpital (1661 - 1704).

(a) Johann Bernoulli



(b) Isaac Newton

(c) Jakob Bernoulli



(d) Gottfried Leibniz

(e) Tschirnhaus

(f) l'Hôpital

Figura 1: Matemáticos do século XVII que resolveram o problema da braquistócrona.

Alguns anos após a publicação do problema da braquistócrona, o mesmo foi resolvido pelo grande matemático suíço Leonhard Euler (1707-1793), que foi aluno de Johann Bernoulli. O solução proposta por Euler é de natureza bem diferente da solução de Johann Bernoulli (que pode ser vista em [1]). O método apresentado por Euler além de ser totalmente original, permite resolver outros problemas de natureza correlata, sendo uma pedra fundamental no desenvolvimento do cálculo variacional.

1.2 Modelagem do Problema

Para modelar o problema da braquistócrona vamos utilizar um sistema de coordenadas cartesiano, cujo eixo y está orientado de maneira positiva na direção da força gravitacional que age sobre a partícula M. Suponha que nos instantes inicial e final da trajetória a partícula ocupe respectivamente os pontos $A = (x_0, y_0)$ e $B = (x_1, y_1)$, como ilustrado na Figura 2. Adicionalmente, vamos assumir que a trajetória entre os pontos A e B é descrita por uma função $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ com segunda derivada contínua em $[x_0, x_1]$.

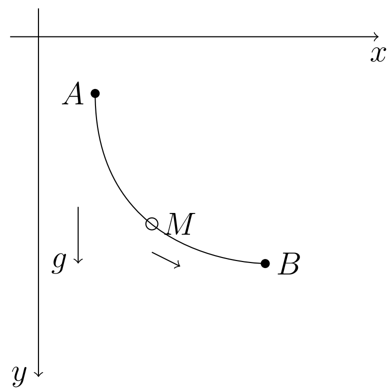


Figura 2: Ilustração de uma partícula M descendo sob ação da gravidade sobre uma trajetória entre os pontos $A = (x_0, y_0)$ e $B = (x_1, y_1)$.

Seja $t : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ o tempo gasto pela partícula para ir da posição (x_0, y_0) até uma posição genérica $(x, y(x))$ sobre a trajetória. Pela regra da cadeia sabemos que

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx}, \tag{1}$$

sendo que o comprimento de arco percorrido sobre a trajetória s é dado por

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + y'(\tau)^2} d\tau, \tag{2}$$

onde y' denota dy/dx.

Assim, pelo teorema fundamental do cálculo, temos que

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}. \tag{3}$$

Além disso, sabemos que a velocidade da partícula v é a taxa de variação temporal do comprimento de arco percorrido

$$v = \frac{ds}{dt}, \tag{4}$$

donde temos que

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v}\sqrt{1 + y'^2}. \tag{5}$$

Decorre da Eq.(5) que o tempo gasto pela partícula para descer do ponto inicial até um ponto qualquer da trajetória (em particular o ponto final) é dado por

$$t(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{v(\tau)} \sqrt{1 + y'(\tau)^2} d\tau. \tag{6}$$

Como este problema não tem atrito, a energia total do sistema é conservada. Logo, numa posição genérica $(x, y(x))$ sobre a trajetória, a energia mecânica do sistema se conserva, i.e., a soma da energia cinética com a energia potencial é constante. Em linguagem matemática podemos escrever este princípio físico da seguinte forma

$$\frac{1}{2}mv(x)^2 - mgy(x) = C, \tag{7}$$

onde m é a massa da partícula, g é a aceleração da gravidade e C é uma constante real. O sinal negativo na expressão acima se deve a fato de que a partícula está abaixo do referencial no qual a energia potencial gravitacional é nula, implicitamente assumido como o nível $y = 0$. A constante C é igual a energia total do sistema e tem o mesmo valor para qualquer ponto sobre a trajetória. Assim, no ponto (x_0, y_0) a mesma vale

$$C = -mgy_0, \tag{8}$$

pois no instante inicial da trajetória a partícula está parada e toda energia do sistema é fornecida pelo potencial gravitacional. Substituindo a Eq.(8) na Eq.(7) e isolando v obtemos a seguinte expressão para a velocidade da partícula

$$v(x) = \sqrt{2g\,(y - y_0)}. \tag{9}$$

Agora vamos substituir a expressão acima na Eq.(6), o que resulta na seguinte expressão para o tempo de descida da partícula (entre o ponto inicial e um ponto genérico da trajetória)

$$t(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{1 + y'(\tau)^2}{2g\,(y(\tau) - y_0)}}\,d\tau. \tag{10}$$

Como objetivamos descobrir qual a trajetória cujo tempo de descida da partícula é mínimo, precisamos descobrir a função y para qual a integral ao lado direito da Eq.(10) atinge o valor mínimo.

2 Noções de Cálculo Variacional

O ramo da matemática que lida com problemas similares ao apresentado na seção anterior (que objetivam maximizar ou minimizar um funcional) é conhecido como cálculo variacional. Nesta seção serão apresentados alguns dos aspectos básicos do cálculo variacional, de forma a desenvolver o ferramental necessário para solução do problema da braquistócrona. O leitor interessado em se aprofundar no assunto é encorajado a consultar uma referência clássica como [3] ou um texto mais moderno tipo [4].

2.1 Equação de Euler-Lagrange

O problema fundamental no qual estamos interessados em resolver, utilizando técnicas de cálculo variacional, consiste em encontrar uma função $y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$, cuja segunda derivada é contínua em $[x_0, x_1]$, satisfazendo as condições de contorno $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$, que minimize ou maximize um funcional da seguinte forma

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f\left(x, y, y'\right) dx, \tag{11}$$

onde f é uma função de três variáveis (x, y, y') que possui as derivadas parciais de segunda ordem em relação a x, y e y' contínuas em $[x_0, x_1]$.

Inicialmente vamos admitir que $\hat{y}$ seja uma função para qual o funcional I atinge um extremo local (mínimo ou máximo). Assim sendo, qualquer perturbação da forma $y = \hat{y} + \epsilon\eta$, deve aumentar (se $\hat{y}$ é mínimo) ou diminuir (se $\hat{y}$ é máximo) o valor de I, sendo $\eta : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ uma função com primeira derivada contínua em $[x_0, x_1]$, tal que $\eta(x_0) = 0$ e $\eta(x_1) = 0$.

Tomando $y = \hat{y} + \epsilon\eta$ na Eq.(11), ficamos com a seguinte função de uma variável em ϵ

$$I(\epsilon) = \int_{x_0}^{x_1} f\left(x, \hat{y} + \epsilon\eta, \hat{y}' + \epsilon\eta'\right) dx, \tag{12}$$

a qual podemos diferenciar com relação a ϵ para obter

$$\frac{d}{d\epsilon} I(\epsilon) = \frac{d}{d\epsilon} \int_{x_0}^{x_1} f\left(x, \hat{y} + \epsilon\eta, \hat{y}' + \epsilon\eta'\right) dx, \tag{13}$$

que pela regra de Leibniz resulta em

$$\frac{d}{d\epsilon} I(\epsilon) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial\epsilon} f\left(x, \hat{y} + \epsilon\eta, \hat{y}' + \epsilon\eta'\right) dx, \tag{14}$$

ou seja,

$$\frac{d}{d\epsilon} I(\epsilon) = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta' \right) dx, \tag{15}$$

sendo as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial y'}$ avaliadas em $(x, \hat{y} + \epsilon\eta, \hat{y}' + \epsilon\eta')$.

Utilizando a integração por partes no segundo termo que aparece dentro da integral no lado direito da Eq.(15) obtemos

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial y'}\eta' dx = \frac{\partial f}{\partial y'}\eta\Big|_{x=x_1} - \frac{\partial f}{\partial y'}\eta\Big|_{x=x_0} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta dx, \tag{16}$$

mas $\eta(x_0) = 0$ e $\eta(x_1) = 0$, logo a Eq.(16) se resume a

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial y'}\eta' dx = -\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta dx, \tag{17}$$

que ao ser substituída na Eq.(15) resulta em

$$\frac{d}{d\epsilon}I(\epsilon) = \int_{x_0}^{x_1} \eta \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] dx. \tag{18}$$

Adicionalmente, o leitor pode notar que quando $\epsilon = 0$, temos $y = \hat{y}$, que por hipótese é um extremo de I. Segue que

$$\frac{d}{d\epsilon}I(0) = 0, \tag{19}$$

uma vez que essa é uma condição necessária ao um extremo de uma função de uma variável. Disso decorre que

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] dx = 0, \tag{20}$$

sendo que agora $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial y'}$ são avaliadas no ponto $(x, \hat{y}, \hat{y}')$.

Agora observe que

$$E(x) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right), \tag{21}$$

é uma função contínua em $[x_0, x_1]$, pois se expandirmos o segundo termo no lado direito da Eq.(21) ficamos com

$$E(x) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y}y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}y'', \tag{22}$$

e tanto f como y são funções com segundas derivadas contínuas.

Reescrevendo a Eq.(20) da seguinte forma

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta E(x) dx = 0, \tag{23}$$

podemos notar que se o integrando na equação acima for nulo, a mesma é automaticamente satisfeita. Assim sendo, é desejável se obter uma condição que permita concluir que $E(x) \equiv 0$ para qualquer função η admissível, i.e., que satisfaça as condições anteriormente impostas sobre a natureza de η.

Afim de se provar que $E(x) \equiv 0$, vamos supor por absurdo que a função E não seja identicamente nula. Então existe um ponto $\hat{x} \in [x_0, x_1]$ onde E é positiva ou negativa. Sem perda de generalidade assuma $E(\hat{x}) > 0$. Como E é contínua em $[x_0, x_1]$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $E(x) > 0$ sempre que $|x - \hat{x}| < \delta$.

Considere agora que a função $\eta : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ seja definida da seguinte forma

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x - \hat{x}| > \delta \\ (x - \hat{x} + \delta)^2 (x - \hat{x} - \delta)^2 & \text{se } |x - \hat{x}| \leq \delta. \end{cases} \tag{24}$$

A função η sendo definida como acima possui todas as propriedades previamente impostas sobre sua natureza. Além disso, é positiva para todos os pontos do intervalo $[x_0, x_1]$ tais que $|x - \hat{x}| < \delta$ e nula para os demais.

Com efeito, temos que

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta E(x) dx = \int_{\hat{x}-\delta}^{\hat{x}+\delta} (x - \hat{x} + \delta)^2 (x - \hat{x} - \delta)^2 E(x) dx > 0, \tag{25}$$

uma vez que o integrando é positivo no intervalo $[\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta]$ (produto de duas funções positivas neste intervalo). Absurdo, pois a Eq.(20) diz que a integral acima é nula.

Concluimos que $E(x) \equiv 0$, ou seja

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0. \tag{26}$$

Acabamos de obter condição necessária para que uma função y seja extremo do funcional I. Basta que y satisfaça a equação diferencial de segunda ordem dada pela Eq.(26), conhecida como *equação de Euler-Lagrange*.

A equação de Euler-Lagrange pode ser deduzida sem assumir nenhuma hipótese com relação a segunda derivada de y, mas o desenvolvimento se torna mais trabalhoso.

Quando buscamos extremos de uma função a uma variável, um primeiro filtro de pontos admissíveis é fornecido pelo teste da primeira derivada igual a zero. No caso de um funcional, que tem dimensão infinita, a equação de Euler-Lagrange desempenha o papel de primeiro filtro.

3 Solução do Problema da Braquistócrona

3.1 Equações Paramétricas

No problema da braquistócrona, desejamos minimizar o funcional dado pela Eq.(10), que ao ser comparando com o funcional da Eq.(11) revela que

$$f(x, y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g\,(y - y_0)}}. \tag{27}$$

A função f dada pela equação acima não apresenta dependência explicita com a variável x, assim admite uma simplificação que será deduzida a seguir.

Se y for um mínimo do funcional t, definido pela Eq.(6), então satisfaz a equação de Euler-Lagrange, Eq.(26). Daí, multiplicando a Eq.(26) por y' temos

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] y' = 0. \tag{28}$$

Somando e subtraindo $y''\frac{\partial f}{\partial y'}$ ao lado esquerdo da equação anterior ficamos com

$$y''\frac{\partial f}{\partial y'} + y'\frac{\partial f}{\partial y} - y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - y''\frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \tag{29}$$

donde percebemos que

$$\frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0, \tag{30}$$

ou seja

$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = \kappa_1, \tag{31}$$

onde κ_1 é uma constante real.

Para a função f dada na Eq.(27), temos que

$$\sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g\,(y-y_0)}} - \frac{(y')^2}{\sqrt{2g\,(y-y_0)\,(1+y'^2)}} = \kappa, \tag{32}$$

ou equivalentemente

$$(y-y_0)\left(1+y'^2\right) = \kappa_2, \tag{33}$$

sendo κ_2 outra constante real. Esta equação pode ser resolvida de forma paramétrica. Seja $y' = \tan(\psi)$. Assim $1 + y'^2 = \sec^2(\psi)$ e

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \frac{\kappa_2}{\sec^2(\psi)} \\ &= y_0 + \kappa_2\cos^2(\psi) \\ &= y_0 + \frac{\kappa_2}{2}\left(1+\cos(2\psi)\right), \end{aligned} \tag{34}$$

logo

$$dy = -2\kappa_2\cos(\psi)\sin(\psi)d\psi. \tag{35}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} dx &= \cot(\psi)dy \\ &= \frac{\cos(\psi)}{\sin(\psi)}\left(-2\kappa_2\cos(\psi)\sin(\psi)\right)d\psi \\ &= -2\kappa_2\cos^2(\psi)d\psi \\ &= -\kappa_2\left(1+\cos(2\psi)\right)d\psi. \end{aligned} \tag{36}$$

Integrando a última equação temos que

$$x = \kappa_3 - \frac{\kappa_2}{2} \left(2\psi + \sin(2\psi)\right), \tag{37}$$

onde κ_3 é uma constante de integração.

As equações (34) e (37) fornecem uma solução paramétrica para o problema da braquistócrona. As curvas planas que possuem representação paramétrica dada por estas duas equações são conhecidas como ciclóides [5].

4 Agradecimentos

Este manuscrito foi elaborado como trabalho final do curso de análise real na PUC-Rio. Sou muito grato ao Prof. Ricardo Sá Earp pela sugestão de tema e comentários sobre este documento.

Referências

[1] Erlichson, H., Johann Bernoulli's brachistochrone solution using Fermat's principle of least time. **European Journal of Physics**, Vol. 20, pp. 299–304, 1999.

[2] Haws, L. and Kiser, T., Exploring the braquistochrone problem. **The American Mathematical Monthly**, Vol. 102, pp. 328-336, 1995.

[3] Gelfand, I. M. and Fomin, S. V., **Calculus of Variations**. New York: Dover Publications, 2000.

[4] Van Brut, B., **The Calculus of Variations**. New York: Springer, 2006.

[5] Whitman, E. A., Some historical notes on the cycloid. **The American Mathematical Monthly**, Vol. 50, pp. 309-315, 1943.