Descrevendo Regiões no Plano Cartesiano e no Espaço Euclidiano

Americo Cunha
Débora Mondaini
Ricardo Sá Earp

Departamento de Matemática
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

1 Regiões no Plano

Nos exemplos a seguir desejamos descrever regiões como uniões de regiões, onde cada uma destas será descrita em um dos dois formatos padrões:

$$\text{“Tipo I”: } R = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; \Big| \;\; a \leq x \leq b \;\text{ e }\; f(x) \leq y \leq g(x)\Big\},$$

ou

$$\text{“Tipo II”: } R = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; \Big| \;\; c \leq y \leq d \;\text{ e }\; h(y) \leq x \leq j(y)\Big\},$$

explicitando o intervalo $[a,b]$ ou $[c,d]$ e as funções f e g ou h e j.

Exemplo 1.1 *Considere a região do plano definida por*

$$R_1 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; \Big| \;\; x^2 \leq y \leq 1 - x^2\Big\}.$$

Para descrever R_1 como uma região de “Tipo I”, tomaremos $f(x) = x^2$ e $g(x) = 1 - x^2$. Os gráficos dessas funções se intersectam nos pontos do plano cujas abscissas satisfazem a equação $x^2 = 1 - x^2$, i.e., $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Assim, temos que

$$R_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; \Big| \;\; -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \;\; e \;\; x^2 \leq y \leq 1 - x^2\right\}.$$

Um esboço da região R_1 pode ser visto na Figura 1.

A fronteira de R_1 é a união das seguintes curvas:

$$C_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; \Big| \;\; y = 1 - x^2 \quad e \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right\},$$

$$C_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; \Big| \;\; y = x^2 \quad e \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

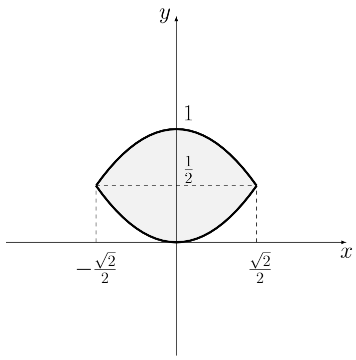

Figura 1: Esboço da região R_1.

Vamos agora descrever R_1 como uma região de "Tipo II". Para isso, será necessário escrever as curvas de sua fronteira através de equações da forma $x = h(y)$:

$$\begin{array}{lcl} y = x^2 & \Leftrightarrow & x = \pm\sqrt{y} \\ y = 1 - x^2 & \Leftrightarrow & x = \pm\sqrt{1-y}\,. \end{array}$$

Devemos dividir R_1 em duas sub-regiões para poder descrevê-la no formato desejado, como indicado na Figura 2.

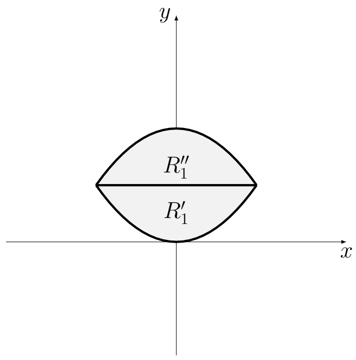

Figura 2: Divisão horizontal da região R_1.

Então $R_1 = R_1' \cup R_1''$, onde

$$R_1' = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \quad e \quad -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y} \right\},$$

$$R_1'' = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \quad e \quad -\sqrt{1-y} \leq x \leq \sqrt{1-y} \right\}.$$

Exemplo 1.2 *Agora vejamos a região*

$$R_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| \leq y \leq 1 - x^2 \right\}.$$

Observe que a região R_2 está definida por duas inequações. Nessas inequações, a variável y é limitada inferiormente por $|x|$ e superiormente por $1 - x^2$. Assim, para descrevê-la como uma região de "Tipo I", tomaremos $f(x) = |x|$ e $g(x) = 1 - x^2$. Os limites do intervalo $[a, b]$ são determinados pelas abscissas dos pontos de interseção das curvas $y = |x|$ e $y = 1 - x^2$, i.e., pelos valores de x que satisfazem $|x| = 1 - x^2$.

Se $x \geq 0$, a última equação equivale a $x^2+x-1=0$, a qual possui duas soluções:

$$x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad e \quad x_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}.$$

Sendo x não negativo, a única solução válida é x_1.

Se $x < 0$, a equação de interesse se torna $x^2 - x - 1 = 0$, cujas soluções são:

$$x_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad x_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Como x é negativo, a única solução válida é x_4.

Logo, a região R_2 (esboçada na Figura 3) pode ser escrita como

$$R_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad e \quad |x| \leq y \leq 1-x^2 \right\}.$$

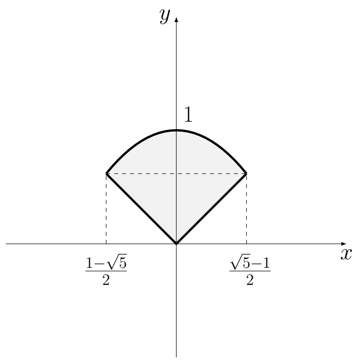

Figura 3: Esboço da região R_2.

A fronteira de R_2 é a união das seguintes curvas:

$$C_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ y = 1-x^2 \quad e \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right\},$$

$$C_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ y = |x| \quad e \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right\}.$$

Podemos ainda descrever a região R_2 como uma região de "Tipo II". Para isto, é importante saber expressar sua fronteira através de equações do tipo $x = h(y)$. Observe que:

$$\begin{array}{lcl} y = x & \Leftrightarrow & x = y \\ y = -x & \Leftrightarrow & x = -y \\ y = 1-x^2 & \Leftrightarrow & x = \pm\sqrt{1-y}\,. \end{array}$$

Verifique que $R_2 = R_2' \cup R_2''$ (Figura 4), onde

$$R_2' = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad e \quad -y \leq x \leq y \right\},$$

$$R_2'' = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq y \leq 1 \quad e \quad -\sqrt{1-y} \leq x \leq \sqrt{1-y} \right\}.$$

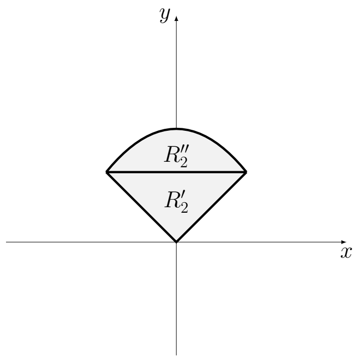

Figura 4: Divisão horizontal da região R_2

Exemplo 1.3 *Considere agora a seguinte região do plano:*

$$R_3 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ -1 \leq y \leq 1 \quad e \quad \sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{2-y^2} \right\}.$$

Observe que R_3 já está descrita como uma região do "Tipo II" (pois y varia entre duas constantes e x varia entre duas funções de y). Um esboço desta região é apresentado na Figura 5

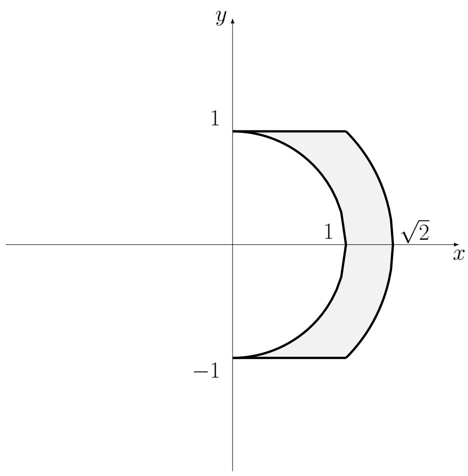

Figura 5: Esboço da região R_3.

A fronteira de R_3 é a união das seguintes curvas:

$$C_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ y = 1 \quad e \quad 0 \leq x \leq 1 \right\},$$

$$C_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ y = -1 \ \ e \ \ 0 \leq x \leq 1 \right\},$$

$$C_3 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x = \sqrt{1-y^2} \ \ e \ \ -1 \leq y \leq 1 \right\},$$

$$C_4 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x = \sqrt{2-y^2} \ \ e \ \ -1 \leq y \leq 1 \right\}.$$

Para descrever R_3 como uma região de "Tipo I", vamos estudar sua fronteira (lembrando que agora queremos expressá-la através de equações da forma $y = f(x)$):

$$\begin{aligned} x = \sqrt{1-y^2} \ &\Leftrightarrow \ y = \pm\sqrt{1-x^2} \\ x = \sqrt{2-y^2} \ &\Leftrightarrow \ y = \pm\sqrt{2-x^2}\,. \end{aligned}$$

Este exemplo é um pouco mais complicado do que os que vimos até agora, pois será necessário dividir R_3 em três sub-regiões: $R_3' \cup R_3'' \cup R_3'''$ (Figura 6), onde

$$R_3' = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ 0 \leq x \leq 1 \ \ e \ \ -1 \leq y \leq -\sqrt{1-x^2} \right\},$$

$$R_3'' = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ 0 \leq x \leq 1 \ \ e \ \ \sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1 \right\},$$

$$R_3''' = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ 1 \leq x \leq \sqrt{2} \ \ e \ \ -\sqrt{2-x^2} \leq y \leq \sqrt{2-x^2} \right\}.$$

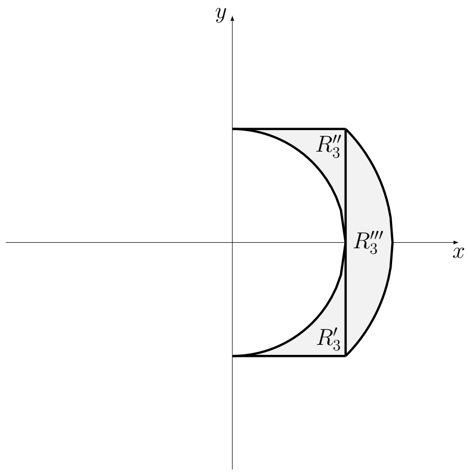

Figura 6: Divisão vertical da região R_3.

Vamos agora considerar um exercício interessante: descrever a região R_3 como união de regiões escritas na forma $\{(r,\theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta \text{ e } f(\theta) \leq r \leq g(\theta)\}$ (ou seja, descrever R_3 em coordenadas polares). Lembrando que a relação entre as coordenadas cartesianas e polares é dada por $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$, temos que a equação da reta $y = 1$ em coordenadas polares é $r = 1/\sin(\theta)$. Analogamente, $y = -1$ é reescrita como $r = -1/\sin(\theta)$. Logo, verifique que R_3 é dada como união das seguintes sub-regiões:

$$\left\{ (r,\theta) \ \mid \ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq -\frac{\pi}{4} \ \ e \ \ 1 \leq r \leq -\frac{1}{\sin(\theta)} \right\},$$

$$\left\{(r,\theta) \;\middle|\; -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4} \;\; e \;\; 1 \le r \le \sqrt{2}\right\},$$

$$\left\{(r,\theta) \;\middle|\; \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \;\; e \;\; 1 \le r \le \frac{1}{\sin(\theta)}\right\}.$$

Exemplo 1.4 *Considere a seguinte região do plano:*

$$R_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\ln(x+1) \le y \le \ln(x) \;\; e \;\; 0 < x \le 3\right\}.$$

O limite inferior para a variável x é a abscissa do ponto de interseção entre as curvas $y = -\ln(x+1)$ e $y = \ln(x)$, ou seja, a solução da equação $-\ln(x+1) = \ln(x)$:

$$\begin{aligned}
& -\ln(x+1) = \ln(x) \\
\Leftrightarrow \quad & \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) = \ln(x) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{x+1} = x \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 + x - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

Como $x > 0$, consideraremos apenas a solução positiva da equação acima. Logo,

$$R_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{\sqrt{5}-1}{2} \le x \le 3 \;\; e \;\; -\ln(x+1) \le y \le \ln(x)\right\}.$$

Um esboço desta região é dado pela Figura 7.

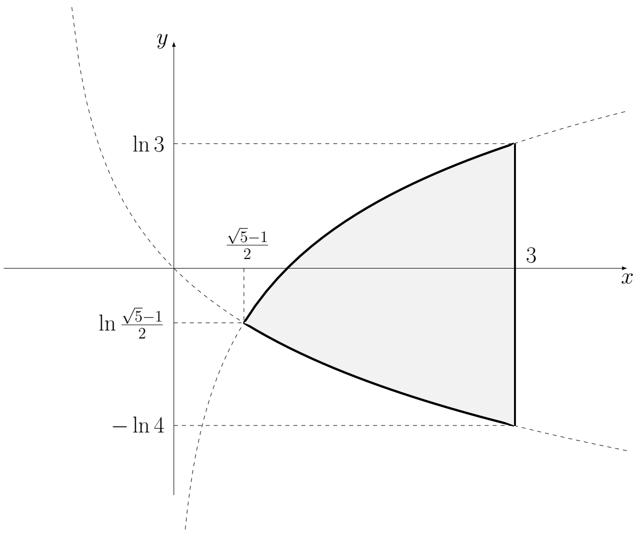

Figura 7: Esboço da região R_4.

A fronteira de R_4 é a união das seguintes curvas:

$$C_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = \ln(x) \;\; e \;\; \frac{\sqrt{5}-1}{2} \le x \le 3\right\},$$

$$C_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = -\ln(x+1) \;\; e \;\; \frac{\sqrt{5}-1}{2} \le x \le 3\right\},$$

$$C_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = 3 \;\; e \;\; -\ln(4) \le y \le \ln(3)\right\},$$

Para descrevê-la como uma região de "Tipo II", devemos expressar suas fronteiras através de equações da forma $x = h(y)$:

$$y = \ln(x) \quad\Leftrightarrow\quad x = e^y$$

$$y = -\ln(x+1) \;\Leftrightarrow\; y = \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) \;\Leftrightarrow\; e^y = \frac{1}{x+1} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{e^y} - 1$$

Para encontrar os extremos do intervalo $[c, d]$, basta procurar pelas ordenadas dos pontos de interseção das curvas $y = -\ln(x+1)$ e $y = \ln(x)$ com a reta vertical $x = 3$. Logo, $c = -\ln(4)$ e $d = \ln(3)$. Entretanto, será ainda necessário dividir horizontalmente a região R_4 em duas sub-regiões, como ilustrado na Figura 8.

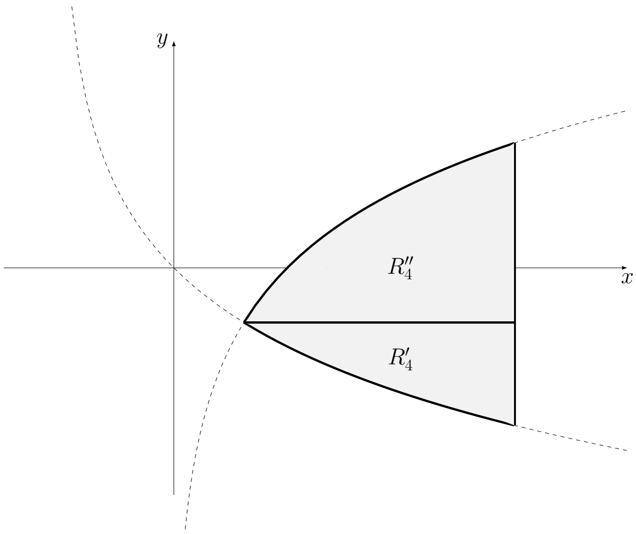

Figura 8: Divisão horizontal da região R_4.

E então $R_4 = R_4' \cup R_4''$, onde

$$R_4' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\ln(4) \le y \le \ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \;\; e \;\; \frac{1}{e^y} - 1 \le x \le 3\right\},$$

$$R_4'' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \le y \le \ln(3) \;\; e \;\; e^y \le x \le 3\right\}.$$

Exemplo 1.5 *Considere a seguinte região do plano:*

$$R_5 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \;,\; sen(x) \leq y \leq cos(x) \right\}.$$

As curvas $y = sen(x)$ *e* $y = cos(x)$ *intersectam-se em* $x = \dfrac{\pi}{4}$. *Logo, a região* R_5 *pode ser descrita como*

$$R_5 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \;,\; sen(x) \leq y \leq cos(x) \right\}.$$

A fronteira de R_5 *é composta por três curvas:*

$$\begin{aligned} C_1 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = 0 \;,\; 0 \leq y \leq 1 \right\}, \\ C_2 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = sen(x) \;,\; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right\}, \\ C_3 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = cos(x) \;,\; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right\}. \end{aligned}$$

Para descrever R_5 *como uma região do "Tipo II", devemos dividi-la em duas sub-regiões:* $R_5 = R_5' \cup R_5''$.

Observando que

$$\begin{aligned} & y = sen(x) \Leftrightarrow x = arcsen(y) \\ & y = cos(x) \Leftrightarrow x = arccos(y) \\ & sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

temos:

$$R_5' = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \;,\; 0 \leq x \leq arcsen(y) \right\},$$

$$R_5'' = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{\sqrt{2}}{2} \leq y \leq 1 \;,\; 0 \leq x \leq arccos(y) \right\}.$$

Exercício 1.1 *Calcule os centróides das regiões planas estudadas nos Exemplos 1.1 a 1.4.*

Exercício 1.2 *Seja* $R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ x^2 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\right\}$. *Esboce esta região e calcule seu centróide.*

Exercício 1.3 *Seja* $R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ -1 \leq x \leq 1 \ \text{ e } \ \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}\right\}$. *Descreva esta região em coordenadas polares e calcule seu centróide.*

2 Regiões no Espaço

Nos exemplos a seguir desejamos descrever regiões do espaço no formato padrão

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ F(x, y) \leq z \leq G(x, y) \ \text{ e } \ (x, y) \in R\right\},$$

explicitando a região R e as funções F e G.

Exemplo 2.1 *Considere a região*

$$U_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right\}.$$

Nesse exemplo temos que $F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ *e* $G(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. *Os gráficos dessas funções se intersectam ao longo de uma curva no espaço, cuja representação cartesiana é dada pelas equações* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *e* $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. *Ao eliminarmos a variável* z *das equações anteriores, obtemos* $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, *a equação que define a fronteira da projeção ortogonal de* U *no plano* xy. *A última equação equivale a* $x^2 + y^2 = 1/2$. *Logo, a projeção ortogonal* U *no plano* xy *é um disco centrado na origem de raio* $\sqrt{2}/2$.

Assim, temos que

$$U_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2} \ \text{ e } \ (x, y) \in R_1\right\},$$

onde

$$R_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \ \text{ e } \ -\sqrt{\frac{1}{2} - x^2} \leq y \leq \sqrt{\frac{1}{2} - x^2}\right\}.$$

A fronteira de U_1 *é a união das seguintes superfícies:*

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ z = \sqrt{x^2 + y^2} \ , \ x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\right\},$$

$$S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \ , \ x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

Um esboço da região U_1 *pode ser visto na Figura 9.*

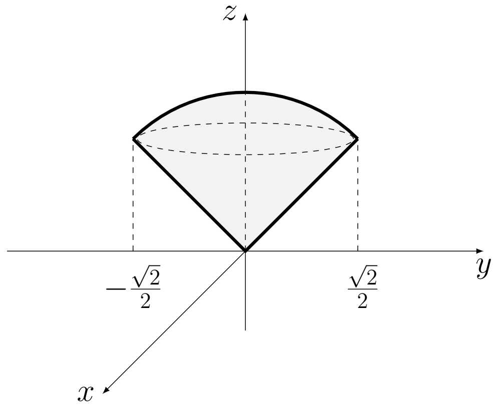

Figura 9: Esboço da região U_1.

Em coordenadas cartesianas, o volume do sólido U_1 é dado por:

$$Vol(U_1) = \int_{x=-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{y=-\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}} \left(\sqrt{1-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2}\right) dy\ dx\,.$$

Esta é uma integral muito difícil de ser calculada, mas podemos simplificar nossa tarefa se usarmos o fato de que a região de integração, R_1, é um círculo centrado na origem de raio $\sqrt{2}/2$. Em coordenadas polares, o volume do sólido U_1 é dado por:

$$Vol(U_1) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\sqrt{1-r^2} - r\right) r dr\ d\theta = \frac{\pi(2-\sqrt{2})}{3}\,.$$

Como exercício, calcule o volume do seguinte sólido:

$$\tilde{U}_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ \sqrt{x^2+z^2} \le y \le \sqrt{1-x^2-z^2}\right\}.$$

Exemplo 2.2 *Observe a região*

$$U_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ x^2+y^2 \le 1 \ \ e \ \ -2 \le z \le 7-y\right\},$$

que corresponde ao sólido contido no cilindro $x^2+y^2 \le 1$, delimitado pelos planos $z=-2$ e $z=7-y$ (veja Figura 10).

A projeção ortogonal de U_2 no plano xy é obviamente um círculo centrado na origem de raio 1. Logo, no formato padrão, esta região é descrita como

$$U_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ -2 \le z \le 7-y \ \ e \ \ (x,y) \in R_2\right\},$$

onde

$$R_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ -1 \le x \le 1 \ \ e \ \ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}.$$

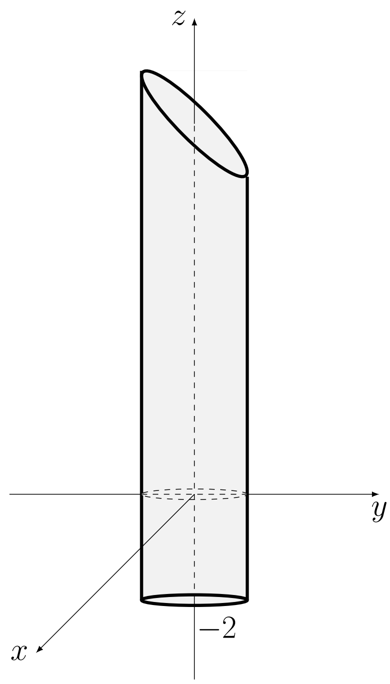

Figura 10: Esboço da região U_2.

A fronteira de U_2 é a união das seguintes superfícies:

$$S_1 = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\;\Big|\;\; z = -2 \;\; e \;\; x^2 + y^2 \leq 1\Big\},$$

$$S_2 = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\;\Big|\;\; z = 7 - y \;\; e \;\; x^2 + y^2 \leq 1\Big\},$$

$$S_3 = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\;\Big|\;\; x^2 + y^2 = 1 \;\; e \;\; -2 \leq z \leq 7 - y\Big\}.$$

O volume do sólido U_2 é dado por:

$$Vol(U_2) = \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \big(7 - y - (-2)\big)\, dy \; dx = 9\pi\,.$$

Assim como no exemplo anterior, também seria conveniente aqui usar coordenadas polares para descrever a região de integração, R_2. O volume de U_2 seria então dado por:

$$Vol(U_2) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \big(9 - r\sin(\theta)\big)\, rdr \; d\theta = 9\pi\,.$$

Exemplo 2.3 *Considere as regiões*

$$U_3' = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\;\middle|\;\; x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 1\right\},$$

e

$$U_3'' = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\;\middle|\;\; \frac{4}{3}\left(x^2 + y^2\right) \leq z^2\right\}.$$

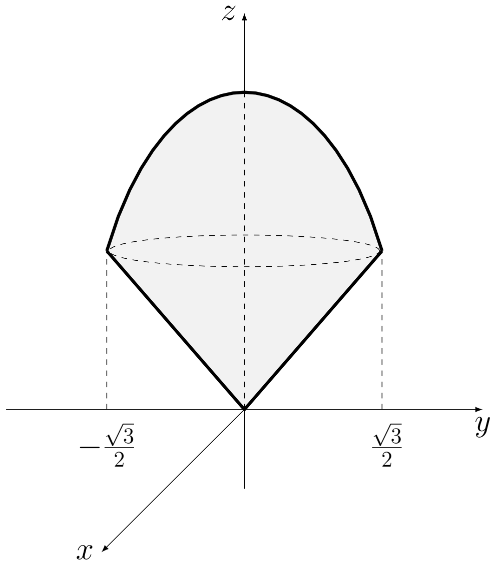

Figura 11: Esboço da região U_3.

Seja $U_3 = U_3' \cap U_3'' \cap \{z \geq 0\}$. *Na Figura 11 vemos um esboço desta região.*

Como $z \geq 0$, *para encontrar a equação da curva no espaço onde o elipsóide* U_3' *e o cone* U_3'' *se interceptam, basta igualar a parte de cima do elipsóide à parte de cima do cone:*

$$2\sqrt{1-x^2-y^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

A projeção ortogonal de U_3 *no plano* xy *é obtida simplificando-se a equação acima:* $x^2+y^2 = 3/4$ *(um círculo centrado na origem, de raio* $\sqrt{3}/2$*). Logo, descrevemos a região* U_3 *da seguinte forma:*

$$U_3 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2\sqrt{1-x^2-y^2} \quad e \quad (x,y) \in R_3 \right\},$$

onde

$$R_3 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad e \quad -\sqrt{\frac{3}{4}-x^2} \leq y \leq \sqrt{\frac{3}{4}-x^2} \right\}.$$

A fronteira de U_3 *é a união das seguintes superfícies:*

$$S_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^2+y^2}\;,\; x^2+y^2 \leq \frac{3}{4} \right\},$$

$$S_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = 2\sqrt{1-x^2-y^2}\;,\; x^2+y^2 \leq \frac{3}{4} \right\},$$

O volume do sólido U_3 *é dado por:*

$$Vol(U_3) = \int_{x=-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{y=-\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}} \left(2\sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^2+y^2} \right) dy\; dx = \frac{2\pi}{3}\,.$$

Usando coordenadas polares, o cálculo da integral acima é bem mais simples:

$$Vol(U_3) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(2\sqrt{1-r^2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} r \right) rdr\ d\theta = \frac{2\pi}{3}\,.$$

Exemplo 2.4 *Considere U_4 a região do espaço delimitada pelos planos $y = 0$, $z = 0$ e $y + z = 5$ e pelo cilindro sobre a curva $z = 4 - |x|$. Um esboço de U_4 pode ser visto na Figura 12.*

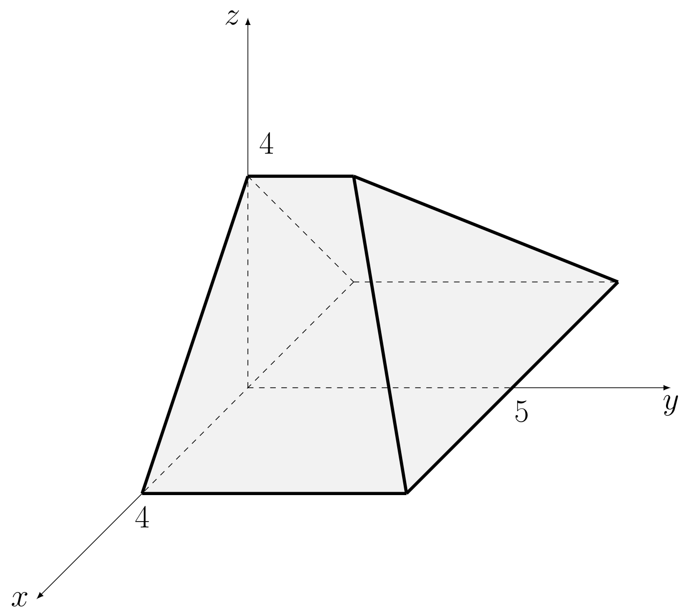

Figura 12: Esboço da região U_4.

A maneira mais fácil de descrever esta região é no seguinte formato:

$$U_4 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ F(x, z) \le y \le G(x, z) \ \ e \ \ (x, z) \in R \right\},$$

onde R é uma região do plano xz.

A projeção ortogonal de U_4 no plano xz é a região delimitada pelas retas $z = 4-x$, $z = 4 + x$ e $z = 0$. Logo,

$$U_4 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ 0 \le y \le 5 - z \ \ e \ \ (x, y) \in R_4 \right\},$$

onde

$$R_4 = \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ 0 \le z \le 4 \ \ e \ \ -4 + z \le x \le 4 - z \right\}.$$

A fronteira de U_4 é a união das seguintes superfícies:

$$S_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ z = 0\ ,\ -4 \le x \le 4\ ,\ 0 \le y \le 5 \right\},$$

$$S_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ y = 0\ ,\ 0 \le z \le 4 - |x| \right\},$$

$$S_3 = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \ \Big| \ \ z = 4 - |x| \ , \ -4 \leq x \leq 4 \ , \ 0 \leq y \leq 5 - z\Big\} ,$$

$$S_4 = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \ \Big| \ \ y = 5 - z \ , \ 0 \leq z \leq 4 - |x|\Big\} .$$

O volume do sólido U_4 é dado por:

$$Vol(U_4) = \int_{z=0}^{4} \int_{x=-4+z}^{4-z} (5-z)\, dx \ dz = \frac{176}{3} .$$

Como exercício, calcule

$$\iint_{R_4} xz \ dx\, dz .$$

Exemplo 2.5 *Considere a região U_5 de $\mathbb{R}^3$ dada por*

$$U_5 = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \ \Big| \ \ -1 \leq z \leq x^2 - y^2 + 10 \ , \ x^2 + y^2 \leq 1\Big\} .$$

A projeção ortogonal de U_5 sobre o plano xy é o disco centrado na origem de raio 1. Logo,

$$U_5 = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \ \Big| \ \ -1 \leq z \leq x^2 - y^2 + 10 \ , \ (x,y) \in R_5\Big\} ,$$

onde

$$R_5 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ \Big| \ \ -1 \leq x \leq 1 \ , \ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\Big\} .$$

A fronteira de U_5 é a união das seguintes superfícies:

$$S_1 = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \ \Big| \ \ z = -1 \ , \ x^2 + y^2 \leq 1\Big\} ,$$

$$S_2 = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \ \Big| \ \ z = x^2 - y^2 + 10 \ , \ x^2 + y^2 \leq 1\Big\} ,$$

$$S_3 = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \ \Big| \ \ x^2 + y^2 = 1 \ , \ -1 \leq z \leq x^2 - y^2 + 10\Big\} .$$

Em coordenadas cartesianas, o volume do sólido U_5 é dado por

$$\begin{aligned} Vol(U_5) &= \iint_{R_5} \big((x^2 - y^2 + 10) - (-1)\big) \ dxdy \\ &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \big(x^2 - y^2 + 11\big) \ dydx \\ &= 11\pi . \end{aligned}$$

Para facilitar o cálculo da integral acima, podemos descrever a região R_5 em coordenadas polares: $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Usando ainda que $x = r\,cos(\theta)$ e

$y = r sen(\theta)$, *o volume de* U_5 *pode ser reescrito como:*

$$\begin{aligned}
Vol(U_5) &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \Big(r^2 cos^2(\theta) - r^2 sen^2(\theta) + 11\Big)\, r\, dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \Big(r^2 cos(2\theta) + 11\Big)\, r\, dr d\theta \\
&= \left(\int_0^1 r^3\, dr\right)\left(\int_0^{2\pi} cos(2\theta)\, d\theta\right) + 11\pi \\
&= \frac{1}{4}\,.\,0 + 11\pi \\
&= 11\pi\,.
\end{aligned}$$

Exercício 2.1 *Seja*

$$R = \Big\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \;\;\Big|\;\; |y| \le z \le 1 - y^2\Big\}\,.$$

Considere a região $U \subset \mathbb{R}^3$*, obtida girando-se* R *em torno do eixo* z*. Descreva* U *usando desigualdades.*

Exercício 2.2 *Seja* U *a região do espaço delimitada pelo parabolóide* $z = x^2 + y^2$ *e pelo plano* $z = y + 2$.

a) Escreva U *usando desigualdades.*
b) Explicite R*, região do plano* xy*, obtida pela projeção ortogonal de* U *nesse plano.*

Exercício 2.3 *Considere a seguinte região*

$$U = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\;\Big|\;\; x^2 + y^2 \ge 1 + z^2, \;\; x^2 + y^2 + z^2 \le 5 \;\; e \;\; z \ge 0\Big\}\,.$$

Descreva essa região como a união de duas regiões U_1 *e* U_2 *escritas no formato padrão.*

Exercício 2.4 *Esboce as regiões do espaço a seguir e determine suas respectivas projeções no plano xy.*

a) $U_1 = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\;\Big|\;\; x^2 + y^2 + z^2 \le 4 \;\; e \;\; z \ge \sqrt{x^2+y^2}\Big\}$
b) $U_2 = U_1 \cap \{z \ge 1\}$
c) $U_3 = U_2 \cap \{x \ge 0 \;\; e \;\; y \ge 0\}$

Exercício 2.5 *Considere* U *a região do espaço delimitada pelos planos* $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 5$ *e pelo cilindro sobre uma parábola dado por* $z = 4 - x^2$*. Seja* R *a projeção ortogonal de* U *no plano* xz*.*

a) Esboce U*, explicitando sua fronteira por equações.*
b) Descreva R *através de equações ou inequações cartesianas.*
c) Calcule o volume de U*.*